التصحيح النموذجي: (امتحان 2022) - مقياس تحليل مركب.

التمرين الأول: (10 نقاط)

1- إثبات أن الدالة $f(z)$ تحليلية على $\mathbb{C}$.

الدالة $f(z)=sh(z)$ تحليلية على $\mathbb{C}$ لأنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{C}$ لأنها تحقق شرط كوشي-ريمان ⇐

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$ ①

من خلال تعريف ch و sh.

$$ch(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\quad sh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$ ①

$$\Rightarrow f(z)=sh(z)=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{x+iy}-e^{-x-iy}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{x}(\cos y+i\sin y)-e^{-x}(\cos y-i\sin y)\right)$$ ①

$$=\frac{1}{2}\left(\cos y(e^{x}-e^{-x})+i\sin y(e^{x}+e^{-x})\right)=\cos y\, sh(x)+i\sin y\, ch(x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u(x,y)=sh(x)\cos y\\ v(x,y)=ch(x)\sin y\end{cases}$$ ①

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=ch\,x\cos y\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-sh(x)\sin y\end{cases},\quad\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial y}=ch\,x\cos y\\ \frac{\partial v}{\partial x}=sh(x)\sin y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$ ① شرطي كوشي ريمان محققين

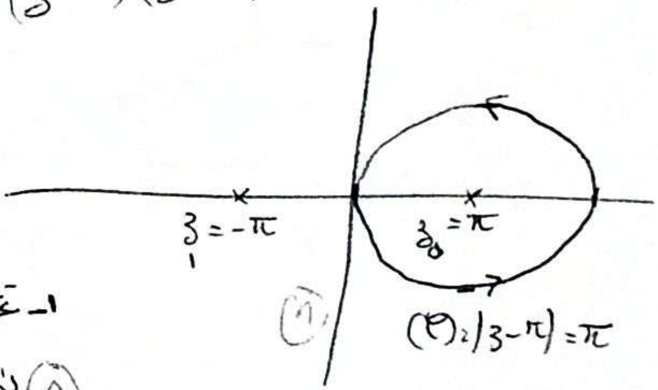
⇐ الدالة $f(z)=sh(z)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{C}$ ⇐ تحليلية على $\mathbb{C}$.

2- حساب التكامل باستعمال نظرية كوشي:

$$I=\oint\frac{sh(z)}{z^{2}-\pi^{2}}dz\quad,\quad z^{2}-\pi^{2}=(z-\pi)(z+\pi).$$ (0,٧)

$C: |z-\pi|=\pi$

$$I=\oint\frac{sh(z)}{(z-\pi)(z+\pi)}dz$$ (0,٧)



1- نختار الدالة: $f(z)=\frac{sh(z)}{z+\pi}$ وهي تحليلية داخل (C) (C)

(٨) لأنها دالة تحليلية على $\mathbb{C}$ ماعدا $z_1=-\pi$ وهي خارج (C)

2- النقطة $z_0=\pi$ داخل المسار

حسب نظرية كوشي:

$$\oint_{(C)}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz=2\pi i\, f(z_0)$$ (0,٧)

$$=\cancel{2}\pi i\cdot\frac{sh(\pi)}{\cancel{(\pi+\pi)}}=i\, sh(\pi)\Rightarrow$$ (0,٧)

$$\oint_{(C): |z-\pi|=\pi}\frac{sh(z)}{z^{2}-\pi^{2}}dz=i\, sh(\pi)$$ ①

التمرين الثاني : (10 نقاط)

1- جذور المعادلة : $z^2+9=0$

$z^2+9=0 \Rightarrow z^2=-9 = 9\,e^{i(\pi+2k\pi)}$

(٤) $\Rightarrow z_i = 3\,e^{i(\frac{\pi}{2}+k\pi)} = 3\,e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{ik\pi}$; $\left\{ e^{ik\pi} = \begin{cases} +1 & k \text{ زوجيا} \\ -1 & k \text{ فرديا} \end{cases}\right.$

$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 3i \\ z_2 = -3i \end{cases}$ (1)

2- حساب التكامل باستعمال نظرية الرواسب :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx.$$

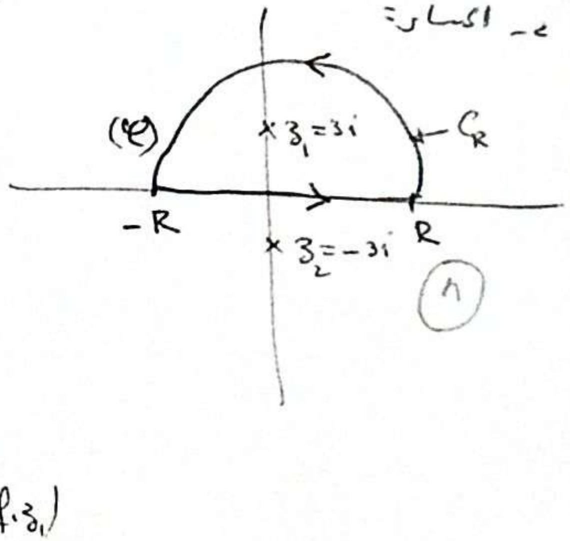
حسب نظرية الرواسب $\oint f(z)dz = 2\pi i \sum Res(f,z_i)$ (0,V)

- $f(z)$ تحليلية داخل (C) ما عدا الأقطاب.
- z_i الأقطاب داخل المسار (C).

1. نختار الدالة : $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+9)^2}$ (0,1) ، دالة مركبة تحليلية على ℂ ما عدا

الأقطاب = $\begin{cases} z_1 = 3i \\ z_2 = -3i \end{cases}$ منه الرتبة $\underline{m=2}$ (0,V)

2- المسار :



(٨)

3-

$$\oint_{(C)} \frac{z^2}{(z^2+9)^2}dz = 2\pi i\, Res(f,z_1).$$ (0,1)

$$\int_{-R}^{R} \frac{z^2}{(z^2+9)^2}dz + \int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+9)^2}dz = 2\pi i\, Res(f,z_1)$$ (0,1)

$z=x$ $\qquad$ $z=Re^{i\theta},\ dz=iRe^{i\theta}d\theta.$

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+9)^2}dx + \cancel{\int_{0}^{\pi} \frac{R^2e^{2i\theta}}{(R^2e^{2i\theta}+9)^2}}^{\to 0}\cdot iRe^{i\theta}d\theta = 2\pi i\, Res(f,z_1)$$ (0,1)

$R \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2}dx \overset{(0,1)}{=} 2\pi i\, Res(f,z_1).$$

$$Res(f,z_1) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}\Big[(z-z_1)^m f(z)\Big]_{z=z_1}$$

(1) $= \frac{\partial}{\partial z}\Big[(z-z_1)f(z)\Big]_{z=z_1} = \frac{\partial}{\partial z}\Big[\frac{z^2}{(z-z_2)^2}\Big]_{z=z_1}$

$= \frac{2z(z-z_2)^{\cancel{2}} - 2z^2\cancel{(z-z_2)}}{(z-z_2)^4}\Big|_{z=z_1}$

$= \frac{2z_1(z_1-z_2)-2z_1^2}{}$ $\qquad z=z_1$ $\quad 2(3i)(2(3i))-2(3i)^2$

$$\boxed{Res(f,z_1) = \frac{1}{12i}}$$ (0,1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2}dx = 2\pi i\cdot\frac{1}{12i} = \frac{\pi}{6}$$